Univerzitetni programerski maraton

FINALE 2025 – rešitve nalog

Tomaž Hočevar

Poštevanka

Izpiši tabelo poštevanke velikosti N x N v podani obliki.

- poravnava stolpcev
  - širina vrednosti N, N*N

```
  |   1   2   3   4
--+----------------
1 |   1   2   3   4
2 |   2   4   6   8
3 |   3   6   9  12
4 |   4   8  12  16
```

```
N = int(input())
cell_width = len(str(N * N)) + 1
label_width = len(str(N))

print(" "*label_width + " |" +
      "".join([f"{i:>{cell_width}}" for i in range(1, N + 1)]))
print("-"*label_width + "-+" + "-"*cell_width*N)

for i in range(1, N + 1):
    print(f"{i:>{label_width}} |" +
          "".join([f"{i*j:>{cell_width}}" for j in range(1, N + 1)]))
```

</upm UNIVERZITETNI PROGRAMERSKI MARATON

Kazalec

Iz slike kazalca izračunaj uro.

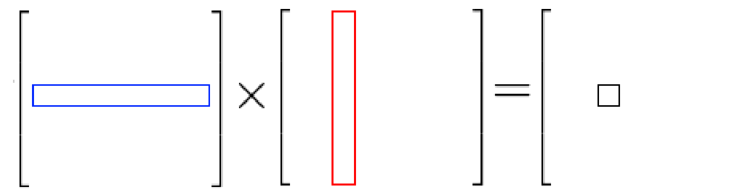
- poiščemo središče, najbolj oddaljen del
  - kazalec je dovolj dolg
- izračunamo kot
  - atan2(y,x)
- iz kota izračunamo uro
  - 1 ura … 2π/12
  - koordinatni system
- pazi na uro 0 oz. 12

```
**
 ***
   ***
     **
      ***
        *o
```

```
dy, dx = y-y0, x-x0
a = atan2(dy, dx)
h = 2*pi/12
t = 3 - round(a/h)
if t<=0: print(t+12)
else: print(t)
```

Matrični koren niča

Min. št. ničel v matriki A z neneg. elementi, da je $A^2 = 0$?



- dvojiška matrika
- maksimalno št. enic
  - skalarni produkt vrstice in stolpca mora imeti v vsakem členu ničlo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

- $A_{y,x} = 1$, s čim vse se množi? $A_{x,*}$
  - diagonala $A_{x,x} = 0$
  - $A_{y,x} = 1$ -> vrstica x mora imeti same ničle
  - "cel" stolpec $A_{*,x}$ je lahko 1
  - stolpca $A_{*,x1} = 1$, $A_{*,x2} = 1$ -> vrstici x1 in x2 morata biti 0
  - k nepraznih stolpcev -> n*k – k*k = k(n-k) enic (max pri k=n/2)
- $n^2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ … blok cca. $n^2/4$ enic

Čemaž

Učinkovito simuliraj premikanje po trikotnem območju.

- majhen gozd ($n \le 2000$) , veliko korakov ($k \le 10^9$)
- v $O(n^2)$ korakih smo izven gozda
  - $O(pn^2)$ … TLE
- premike obravnavamo po diagonalah
  - v $O(n)$ diagonalah smo izven gozda, $O(pn)$ … ok
- zadnja diagonala je lahko delna, smer alternira
- izračunamo kumulativne vsote po diagonalah
  - h+w diagonal
  - diag(d, x1, x2) … vsota g[y][x] na diagonali d=x+y med stolpcema x1, x2

```
1011011
1101110
0111AbFg
1101CEh
1011dI1
0101Jl1
    k
```

</upm UNIVERZITETNI PROGRAMERSKI MARATON

Datotečni sistem

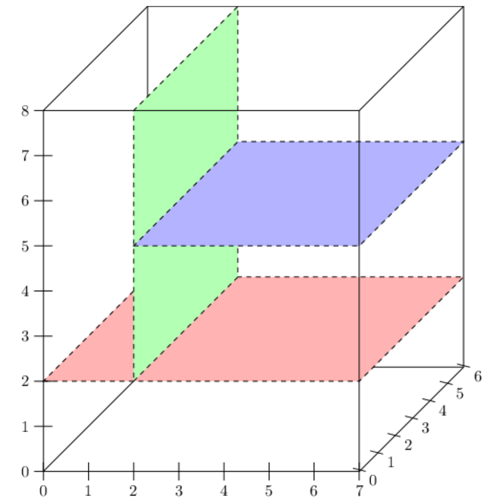
Datotečni sistem v binarni obliki predstavi kot drevo datotek.

- implementacijska naloga
- preberemo celotno zaporedje bajtov
- sprehodimo se po datotečnem sistemu
  - bfs/dfs
  - beremo opise imenikov, imeniških vnosov, i-nodeov, atributov, imen
    - delo s posameznimi bajti in biti
    - podatkovni bloki datotek so nepomembni
  - shranjujemo v slovar: naslov -> struktura
- izpišemo drevesno strukturo
  - dfs (globina za zamik)
  - formatiranje pravic, časov, …

</upm UNIVERZITETNI PROGRAMERSKI MARATON

Pregrajevanje sobe

Pregradi sobo po opisanem postopku, da bo najmanjši prostor čim večji.



- dinamično programiranje?
  - stanje/podproblem: (št. pregrad, x, y, z)
  - izbor odmika pregrade od stene
- samo 3^n zaporedij smeri rezov
  - kako velik del odrezati v fiksni smeri?
- bisekcija po velikosti min. prostora
  - preverimo vseh 3^n zaporedij potez
  - vsakič odrežemo čim manj, da odrezani prostor doseže trenutno mejo
- $O(\log d \cdot 3^n \cdot n)$

</upm UNIVERZITETNI PROGRAMERSKI MARATON

Raketa

Izmed N motorjev jih izberi K, da bodo maksimizirali razmerje med skupnim potiskom in maso.

- požrešne rešitve:
  - izbereš K motorjev z najboljšim razmerjem p_i/m_i ✗
  - iterativno dodajaš motorje, da max. skupno razmerje $P+p_i$ / $M+m_i$ ✗
- bisekcija po učinkovitosti E ✓

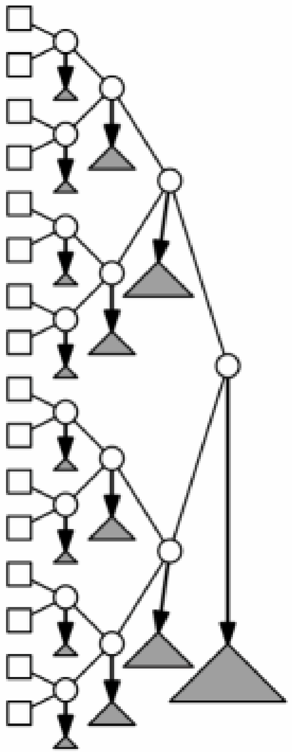
$$\frac{\sum p_i}{\sum m_i} \geq E \qquad \sum p_i - E \sum m_i \geq 0 \qquad \sum (p_i - E m_i) \geq 0$$

  - urediš in izbereš K elementov z največjo vrednostjo p_i – Em_i
  - vsota ≥ 0 -> učinkovitost E je dosegljiva, sicer ni

Demografski urad

2D poizvedbe o vsoti znotraj pravokotnika s spremembami.

- klasičen problem
- kompresija koordinat … x = O(n)
- 1D: Fenwick tree, segment tree, …
- 2D Fenwick tree?
  - prostor: $O(x^2)$
- 1. dimenzija: Fenwick tree
  - prostorsko učinkovito "polno" drevo z n vozlišči
- 2. dimenzija: sparse segment tree
  - začetni interval [1, max] režemo po potrebi
- $O(n \log^2 n)$



</upm UNIVERZITETNI PROGRAMERSKI MARATON

Superniz

Izračunaj prekrivanja pripon-predpon za vseh N parov nizov.

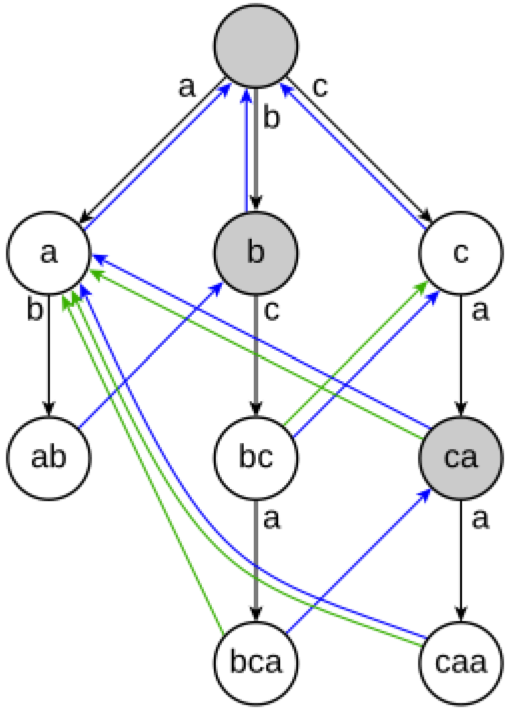
ABCABAABACA AABACAABBACAA

- $O(N^2)$ parov
  - KMP, hash, … $O(N^2S)$ = TLE

- slovar: predpona -> seznam nizov, pripona -> seznam nizov
  - O(NS) hashev
- obravnavamo vedno krajše pripone zadnjega niza p
  - dokler ne najdemo nepraznega seznama
  - spotoma odstranimo neveljavne (že uporabljene) nize
- O(NS)

Superniz

- brez hashev?
- Aho-Corasick
  - posplošitev KMP za iskanje več vzorcev sočasno
  - dodamo: množica nizov, ki pripadajo vozlišču (urejeni po zap. št.)
  - O(N S log N)

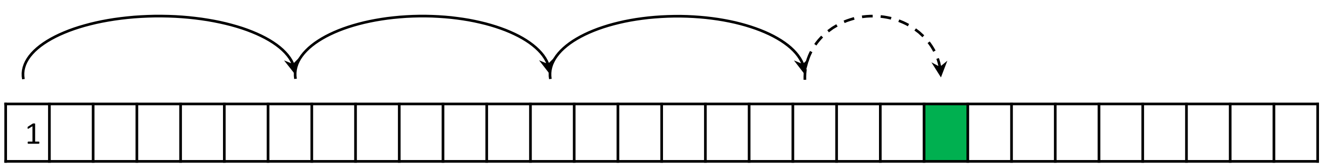


- simulacija požrešnega postopka
  - “odstranimo” zadnji niz p iz AC drevesa (množic)
  - x = končno stanje niza p v drevesu
  - sledimo povezavam (failure links) do prvega še aktivnega vozlišča (z neprazno množico)
  - naslednji niz s je prvi iz množice

Ugani rešitev

S poizvedbami funkcije $f(x) = a^x \% p$, poišči x: $f(x) = 2025$

- $x=1$ -> a
- recimo, da poznamo p
  - diskretni logaritem: veliki korak, mali korak ($k=\sqrt{p}$)
  - $a^x = a^{vk+m}$
  - preverjamo št. velikih korakov (v)
    - ali obstaja m: $a^m \equiv 2025\, a^{-vk} \pmod p$
    - vnaprej tabeliramo vrednosti a^m
  - $O(\sqrt{p})$



Ugani rešitev

- kako poiščemo p?
- kdaj se a^j prvič prelije čez p? $a^1 = f(1), \ldots, a^{j-1} = f(j-1), a^j \neq f(j) = r$
  - $a^j = kp + r, \quad k < a < p$
  - O(log p) poizvedb
- p je največji prafaktor števila $b = a^j - r$
  - problem: $b = O(p^2)$ $\quad p < 10^9, b < 10^{18}$

- alternativa
  - dodatna poizvedba $a^{j+1} = k'p + r'$
  - pazi: $a^{j+1} > 10^{18}$
  - $g = \gcd(b, b')$ je večkratnik p-ja
  - g je verjetno sestavljeno število
  - več dodatnih poizvedb? $p = \gcd(b, b', b'', \ldots)$

Ugani rešitev

- razcep na prafaktorje ($b < 10^{18}$, $b = k\ p$)
  - preverimo in okrajšamo male prafaktorje do 10^6
  - ostane nam

  a) praštevilo ($< 10^9$)
     - test praštevilskosti (delitelji do $\sqrt{10^9}$, Fermat, Miller-Rabin, …)

  b) produkt dveh velikih praštevil ($> 10^6$)
     - faktorizacija: Pollard's rho, Brent, …

</upm UNIVERZITETNI PROGRAMERSKI MARATON