Univerzitetni programerski maraton 2019
2. kolo — rešitve nalog

Nino Bašić
nino.basic@famnit.upr.si

9. maj 2019

Malica

Implementirajte, kar zahteva naloga.

Moderna umetnost

Platno je majhno (največ velikosti 100×100) in tudi pravokotnikov je malo (največ 100). Pravokotnike lahko zato barvamo kar z dvojno zanko for. Predpostavimo, da je $a_i < c_i$ in $b_i < d_i$ (sicer oglišča ustrezno zamenjamo). Zanima nas samo vidni del pravokotnika, zato lahko pravokotnik "obrežemo" in dobimo pravokotnik z nasprotnima ogliščema (a'_i, b'_i) in (c'_i, d'_i), kjer so

$$a'_i = \max(a_i, 1), \quad b'_i = \max(b_i, 1), \quad c'_i = \min(c_i, w), \quad d'_i = \min(d_i, h).$$

Če je $a'_i > c'_i$ ali $b'_i > d'_i$, potem pravokotnik leži zunaj platna in ga ne štejemo.

Biodiverziteta

Naj bo $A(c, i)$ število znakov c v podnizu $a[1..i]$ in naj bo $B(c, i)$ število znakov c v podnizu $b[1..i]$. Izračunati moramo

- $A(c, i)$ za $c \in \{A, C, G, T\}$ in $0 \leq i \leq n$ ter
- $B(c, i)$ za $c \in \{A, C, G, T\}$ in $0 \leq i \leq m$,

kar nam bo v pomoč pri odgovarjanju na poizvedbe. To lahko zračunamo v času $O(n)$ oziroma $O(m)$, saj je $A(c, 0) = B(c, 0) = 0$ za vse c in

$$A(c, i) = A(c, i-1) + \begin{cases} 1, & \text{če je } a[i] = c, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zdaj lahko na vsako poizvedbo odgovorimo v času O(1), saj je:

$$r(B, D) = \sum_c |(A(t_i, c) - A(s_i - 1, c)) - (B(v_i, c) - B(u_i - 1, c))|$$

Kvadrati

Število n in vsi popolni kvadrati, ki jih lahko dobimo, imajo skupno:

- dolžino v dvojiškem zapisu (vodilnih ničel ne štejemo) l in
- število enic v dvojiškem zapisu e.

Naj bo $p(l, e)$ število popolnih kvadratov, ki imajo omenjeni dve lastnosti. Opazimo, da število možnih izhodov ni preveliko, saj je $1 \leq l \leq 63$ in $1 \leq e \leq 63$. Vse odgovore lahko izračunamo lokalno, nato pa pripravimo program z vgrajeno tabelo, ki zgolj izpiše ustrezen odgovor.

Revolver

Naj bo π_i verjetnost preživetja po i-tem strelu, če vemo, da smo $(i-1)$-ti strel preživeli. Naj bo $t(i)$ število znakov '.' v nizu, ki prestavlja boben, in sicer takšnih, da je desno od njih vsaj še i znakov '.' (pika). Potem je:

$$\pi_1 = t(0)/n = (n-k)/n \qquad \text{in} \qquad \pi_i = t(i-1)/t(i-2) \text{ za } i \geq 2.$$

Naj bo $f(s,k)$ optimalna verjetnost preživetja, če moramo streljati še s-krat in smo naredili že k strelov, odkar smo boben nazadnje zavrteli. Velja:

$$f(0,k) = 1$$
$$f(s,k) = \max\{p_1 \cdot f(s-1,1), p_{k+1} \cdot f(s-1,k+1)\}$$

Odgovor po katerem sprašuje naloga je $f(p,0)$ in ga lahko poiščemo z dinamičnim programiranjem.

Tlakovanje

Tlakujemo $n \times m$ (brez škode za splošnost $n \leq m$).

Če je $n = 1$, ni rešljivo, razen če je tudi $m = 1$ (poseben primer).

Denimo, da je $n \geq 2$. Očiten potreben pogoj:

$$3 \mid nm - 1 \qquad (*)$$

Izkaže se, da je to tudi zadosten pogoj za obstoj rešitve.

Če je $n = 2$:

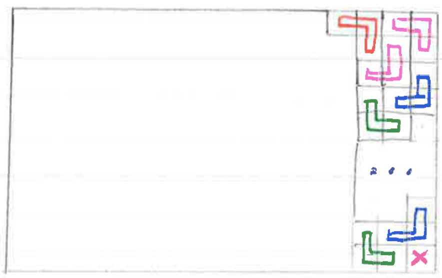
(Deluje za katerikoli m, ki ustreza pogoju (*).)

Če je $n \geq 3$: Najmanjša primera sta 4×4 in 5×5, ki ju lahko rešimo "na roke".

Večje primere lahko reduciramo na manjše. Če je n sodo, potem:

in dobimo problem velikosti $n \times (m-3)$.

Če je n liho, potem:



in dobimo problem velikosti $n \times (m-3)$. Pozor: "odtok" se preseli drugam. Na koncu vedno pridemo do 4×4 ali 5×5, če krajšamo daljšo stranico.

Barvamo lahko na koncu. Izrek štirih barv pravi, da so dovolj 4 barve za barvanje ploščic, ampak mi jih imamo na voljo 26 (angleška abeceda), tako da lahko barvamo požrešno.